Lingua, Matematica e Didattica[1]

D'Amore B. (2000). Lingua, Matematica e Didattica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 28-47.

Bruno D'Amore

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Facoltà di Scienze della Formazione
Università di Bolzano

Summary. *In this paper problems are explored and highlighted which have to do with the interference between everyday language and the specific languages of Mathematics and mathematics teaching, all seen as part of a much larger theme: communication.*

La Matematica è un linguaggio?

Molti Autori asseriscono che la Matematica sia, di per sé stessa, un linguaggio (Schweiger, 1992). Il fatto che abbia, in modo del tutto evidente:

- una sintassi
- una semantica
- una pragmatica

proprie e specifiche, in effetti, fa propendere per una risposta positiva.
In letteratura, a questo proposito, si trova sempre un rinvio ad almeno uno dei tre famosi seguenti "triangoli":

- quello di Charles Sanders Peirce [1839-1914], oggetto di pubblicazione nel 1883, che ha come "vertici": interpretante, rappresentante e oggetto;

[1] Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di ricerca locale: *Ricerche sul funzionamento del sistema allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*. [Questo articolo è alla base delle considerazioni che hanno poi portato alla stesura del cap. 8 di (D'Amore, 1999)].

- quello di Gottlob Frege [1848-1925], oggetto di pubblicazione nel 1892, che ha come "vertici": Sinn [senso], Zeichen [espressione] e Bedeutung [denotazione];
- quello di C. K. Ogden ed I. A. Richards, che avrebbe voluto essere un compendio di quei due, oggetto di pubblicazione nel 1923, che ha come "vertici": referenza, simbolo e referente.

Questi "triangoli" avrebbero voluto cogliere, secondo gli studi che li resero celeberrimi un quarto di secolo fa, «lo studio semiotico del contenuto» (Eco, 1975, pag. 89), ma falliscono il loro scopo, non appena si cerca di definire in modo univoco (per *tutti* i linguaggi o per *tutti* i codici) che cosa debba essere inteso come "significato" di un "significante" (il che è di notevolissima importanza nel nostro caso, se davvero si vuol intendere la Matematica come linguaggio).[2]

Ora, la posizione più ingenua e più immediata è che il significato del significante sia l'oggetto stesso cui essi fanno riferimento, all'interno di una posizione che potremmo ascrivere al "realismo ingenuo". Questa posizione porta ad una fallacia (la "fallacia estensionale") (Eco, 1975, pag. 93 e segg.) che, se è vero che mette in crisi ogni teoria dei codici aventi necessità di estensioni oggettuali attinenti il reale (qualunque cosa esso sia), non disturba però la Matematica i cui "oggetti" sono definibili in forma estensiva, ma senza bisogno (né possibilità) di alcun riferimento ad una realtà oggettiva empirica[3] (D'Amore, **).

Linguaggio e linguaggi

La problematica del come intendere il linguaggio, è in ogni caso, tutt'altro che banale. In D'Amore e Martini (1999), si tenta di riassumere alcuni aspetti elementari (ma abbastanza generali) della questione, destinando lo sforzo, in quel caso specifico, al problema di un'ipotetica formazione degli insegnanti di Matematica; ma, per non divagare troppo, abbiamo cercato di ricondurre sempre la questione a qualche cosa che avesse attinenza con gli aspetti didattici. (Rimando a quell'articolo, per una bibliografia sull'argomento).

---

[2] Al giorno d'oggi, visto l'affermarsi delle teorie pragmatiche a scapito di quelle realiste, si ha grande perplessità che addirittura *il* significato di un dato significante abbia dignità di esistenza in quanto tale. Si veda D'Amore (**).

[3] Non è per caso che il logico matematico Frege può permettersi di considerare il *Bedeutung* in senso strettamente estensionale, dato che egli pensava soprattutto alla Matematica e non alla lingua naturale. Interessanti considerazioni di tipo didattico sono state ottenute applicando le idee di Frege alla semantica dell'Algebra; se ne può vedere una presentazione con esempi in Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994), pagg. 36 e segg.

Si deve cominciare con l'ammettere che: è un fatto accertato e oramai dato per scontato che l'atto dell'insegnamento (con tutto quel di comunicativo che l'accompagna) ricada nelle assai più ampie problematiche della *comunicazione* (Brousseau, 1988, 1989).
Ciò comporta, a mio avviso, una necessaria apertura, al momento in cui si formano gli insegnanti, verso le problematiche della *pragmatica della comunicazione umana* [che farei iniziare in senso moderno con Watzlawick, Beavin, Jackson (1967)] e, in primo luogo, verso un'analisi corretta di tutto quel che significa far uso in modo non improprio del termine *linguaggio*, tanto più se si decide di ammettere, come dicevo, che la Matematica stessa sia un linguaggio.

Quando ho provato a discutere di questo tema con colleghi di àmbito psicologico o pedagogico, impegnati nella formazione "generale" degli insegnanti, mi sono accorto che essi facevano sempre riferimento, per quanto concerne questa questione, al Piaget di *Le langage et la pensée chez l'enfant* (1923), proprio l'opera che Raymond Duval cita come esempio di lavoro nel quale Piaget si limita a studiare *solo* «le differenti forme di comunicazione verbale tra bambini e la loro evoluzione» (Duval, 1996-1997a).
Ma questo (*la comunicazione*) non è che *uno dei modi possibili* d'intendere il linguaggio e, focalizzando l'attenzione solo su questo, si rischia di perdere di vista la portata reale e profonda della problematica!
È per questo che ho voluto indagare un po' più a fondo la questione, suggerendo questa analisi come punto di partenza per uno degli argomenti sui quali far riflettere i futuri docenti di Matematica che si troveranno a dover essere anche professionisti della comunicazione tramite il linguaggio.[4]

Vi sono almeno quattro modi diversi di intendere la parola *linguaggio* (Duval, 1996-1997b):
- come *lingua*, sistema semiotico con un suo funzionamento proprio (l'italiano, lo spagnolo, per esempio);
- come diverse *forme di discorso* prodotto facendo uso di una lingua (una narrazione, una conversazione, una spiegazione, per esempio);
- come funzione generale di *comunicazione* tra individui della stessa specie (tra api, per esempio);
- come uso di un qualsiasi *codice*, più o meno socialmente riconosciuto e condiviso (per esempio, si usa dire: il linguaggio dei fiori).

Ora, quando si accostano linguaggio e pensiero, immediatamente ci si pone più o meno consapevolmente una domanda fondamentale:

[4] Letture preliminari potrebbero essere Arzarello (1983, 1987).

l'uso del sistema semiotico di una lingua è o no necessario al funzionamento del pensiero logico ed allo sviluppo della conoscenza scientifica?

È ben noto che questo è uno dei punti cardine di divergenza tra i *sistemi*[5] di Piaget e di Vygotskij. Poiché di questo tumultuoso "rapporto" si parla sempre di più, forse è bene chiarirne alcuni punti importanti.[6]

Si devono distinguere quattro *periodi* relativi allo sviluppo dei lavori sul pensiero di Piaget:

- periodo *naturalista* (1907-1921);
- periodo *clinico* (1921-1936);
- periodo *sperimentale e operatorio* (1936-1956);
- periodo *costruttivista* (1956-1980).

Vygotskij morì nel 1934, dunque non conobbe che i primi due periodi di Piaget; ed i suoi lavori furono del tutto ignorati in Europa occidentale fino alle traduzioni inglese [1962] e francese [1985]; dunque, Piaget conobbe i lavori di Vygotskij solo quando già si trovava nel suo periodo costruttivista.
Quali sono, relativamente alla sola problematica che qui ci interessa, i principali punti di divergenza tra Piaget e Vygotskij? Ne evidenzio solo alcuni.

A proposito del *linguaggio orale spontaneo*:

- per Piaget: questo è un mezzo per studiare la logica del soggetto dal momento che *la lingua implica un funzionamento logico*, e solo in questo senso; questo è anzi il solo legame tra pensiero e linguaggio;
- per Vygotskij: dato che il bambino vive fin dall'inizio la sua vita in relazione con l'adulto, si trova immerso in un ambiente "parlante": la comunicazione verbale con l'adulto è dunque uno strumento di stimolo del pensiero del bambino.

[Complessa è la tematica del passaggio dal linguaggio orale a quello scritto, ma qui non ci interessa].

Riguardo alla *socializzazione*, per quanto lo stesso termine venga usato in modi diversi (per Piaget, *socializzazione* è più vicino forse a *comunicazione*, cioè trasmissione di un messaggio ad un destinatario), i due Autori la pensano in modo diametralmente opposto. Per il primo, l'apprendimento (e, più in

---

[5] C'è chi dice: *teorie*.

[6] Evito qui di citare direttamente uno o più lavori di Vygotskij; preferisco farlo in modo, per così dire, "indiretto", rinviando a Schneuwly e Bronckart (1985); in questo testo vengono infatti presentate le principali opere *di* Vygotskij, con numerosi commenti e citazioni dirette, nonché molti scritti *su* Vygotskij, anche alla luce del "dibattito" tra Piaget e Vygotskij; in tale testo appare anche un articolo nel quale Piaget replica ad accuse formulate da Vygotskij alle sue opere [ringrazio la collega ed amica Maria Luisa Schubauer Leoni per le prezione indicazioni bibliografiche]. Segnalo anche Tryphon e Vonèche (1996, trad. it. 1998)].

generale, il cognitivo) sembra essere un fatto assolutamente personale, non legato alla socializzazione delle conoscenze; è ben noto, invece, che le cose stanno in modo opposto per Vygotskij.

Ma il vero punto nodale della divergenza è quello relativo alla nozione di *egocentrismo* che è «una nozione importante poiché ha permesso una prima formulazione precisa e feconda del problema filosofico molto generale tra il "linguaggio" ed il pensiero» (Duval, 1996-1997b).
Piaget, nella stessa opera (1923), ne dà due diverse definizioni;

- una relativa alle *funzioni meta-discorsive del linguaggio*, che si potrebbe semplicemente spiegare con la domanda: *si parla solo per comunicare*?; in base a questa posizione, l'egocentrismo sarebbe la caratteristica di un discorso nel quale chi parla o non tiene in alcun conto la presenza di un interlocutore o non ha intenzione di farsi intendere (comunque, non è questo lo scopo della comunicazione);
- una relativa alla *funzione ontologica della credenza* che è inerente ad ogni coscienza individuale, che si potrebbe semplicemente spiegare con la domanda: *si crede che le cose siano così come appaiono ad un singolo individuo o questi è disposto ad ammettere che ci sia un'altra prospettiva, un altro modo di vedere le cose (etnocentrismo)*? In base a questa posizione, l'egocentrismo sarebbe la caratteristica individuale di coscienza e conoscenza.

Si tratta di due modi diversi di studiare la cosa e per ciascuno di essi è lecito aprire una strada di ricerca come, appunto, fece Piaget.
Vygotskij privilegia il primo e quasi non prende in esame il secondo modo di intendere l'egocentrismo ed è proprio in base a queste considerazioni che sviluppa le due nozioni distinte di:

- *linguaggio esterno* (con funzione di comunicazione e quindi destinato ad un'altra persona *che si desidera far intendere*);
- *linguaggio interiore* (con funzione diversa da quella di comunicazione e percepibile da nessun altro che non sé stessi).

Scrive Vygotskij: «Il discorso interiore non è l'aspetto interiore di un discorso esteriore, è una funzione in sé stessa. Resta ancora discorso, cioè pensiero legato alle parole. Ma, mentre nel discorso esteriore il pensiero si incorpora nella parola, nel discorso interiore le parole muoiono portando avanti il pensiero. Il discorso interiore (...) oscilla tra parole e pensiero» (Vygotskij, 1966).
Il *discorso egocentrico* non sarebbe altro, dunque, che una forma di *discorso interiore*.
Ora, il discorso che ciascuno fa a sé stesso ha un ruolo fondamentale nell'organizzazione delle proprie azioni anche intellettuali specie in casi di difficoltà: «Non è in circostanze qualsiasi che un individuo accompagna la sua

azione con attività linguistiche, ma piuttosto quando ha bisogno di pianificare e di controllare una successione di azioni non pienamente dominate. Un'attività automatizzata non s'accompagna affatto a parole, neppure a bassa voce: i bambini che, a 9 anni, hanno perfettamente compreso come si calcoli uno stato iniziale conoscendo lo stato finale e la trasformazione, non parlano affatto. Coloro per i quali ciò è ancora una problema sono molto più prolissi» (Vergnaud, 1990).

Questa breve deviazione dal tema centrale, mostra ampiamente che le problematiche in discussione sono tante (troppe) e notevoli, ricchissime di bibliografia. Il che, allora, mi costringe a limitare le mie considerazioni al solo campo che ci interessa in modo diretto:

- il linguaggio della Matematica *in aula*
- con *intenzione comunicativa*
- allo scopo di far sì che chi ascolta *apprenda*.

Mi dirigerò allora decisamente verso questo punto, anche se penso che non si possa fare a meno di compiere riflessioni di carattere più generale.

Quale linguaggio della Matematica si parla in aula

Eravamo partiti dalla domanda che sempre più si rivela essere ingenua: la Matematica è di per sé stessa un linguaggio? Qualunque risposta si dia a questa domanda, essa è fonte (da sempre) di aspre polemiche; non è dunque il caso di illudersi di risolvere qui questa difficile problematica. Anche perché riguarda, in verità, solo marginalmente la didattica.
Di fatto, però, nel rispondere alla domanda, molti pensano, appunto, alla Matematica in sé; se noi accettiamo il fatto che la Didattica della Matematica tratti tra l'altro problemi di "comunicazione della Matematica", allora siamo portati a concludere che non si può, nel nostro àmbito, non fare qualche riflessione sul complesso rapporto che c'è tra l'esposizione della Matematica con l'intenzione di farla apprendere, il suo apprendimento consapevole, la necessità di comunicazione che si ha (nei due versi) in aula, il contratto di comunicazione che si instaura in aula e la "lingua comune".[7]
Diversi Autori hanno messo in evidenza la complessità dell'acquisizione del "discorso scientifico" (le sue nozioni, i suoi concetti, ma anche i suoi modi linguistici peculiari) da parte degli studenti a causa del linguaggio "speciale" che esso richiede, specie in contrasto con la lingua comune che lo studente

[7] Intenderò qui con questa espressione ciò che altri chiamano *lingua materna*; gli angolofoni: *everiday language*. Insomma quella lingua che si usa normalmente in contesto non istituzionalizzato, per la comunicazione usuale.

utilizza fuori dal contesto scolastico. Si tratta, tanto per cominciare, di entrare a contatto con parole del tutto nuove, o di dover fare uso di parole già note ma che assumono più significati (il più delle volte diversi rispetto al loro uso nella lingua comune), di costrutti linguistici speciali, di attese semantiche diverse, ...
Scrive Hermann Maier: «(Gli esempi menzionati in precedenza mostrano come) non siano solo gli allievi ad incontrare difficoltà nel momento in cui lavorano sulla rappresentazione di fatti o di idee matematiche. Anche gli autori di manuali scolastici e gli insegnanti stessi ne incontrano. Comunque sia, la matematica ha sviluppato una sorta di lingua particolare per trasmettere il suo pensiero indipendentemente da ogni influenza. In particolare nel nostro secolo, questa lingua è stata molto formalizzata e per questo motivo non può essere applicata, durante le lezioni di matematica, come base di comunicazione tra l'insegnante e gli allievi, o tra gli allievi stessi» (Maier, 1989).
Sembra dunque che la *lingua della Matematica* sia influenzata dalla *lingua comune*, all'interno delle aule scolastiche, ben più di quanto potrebbe apparire a prima vista.

D'altra parte, siamo di fronte ad un evidente paradosso didattico che tormenta gli insegnanti sensibili e che chiamerei *paradosso del linguaggio specifico*:

- l'insegnamento è comunicazione ed uno dei suoi scopi è di favorire l'apprendimento degli allievi; per prima cosa, allora, chi comunica deve far sì che il linguaggio utilizzato non sia esso stesso fonte di ostacoli alla comprensione; la soluzione sembrerebbe banale: basta evitare agli allievi quel linguaggio specifico: tutta la comunicazione deve avvenire nella lingua comune;
- la Matematica ha un suo linguaggio specifico (o, addirittura, *è* un linguaggio specifico); uno dei principali obiettivi di chi la insegna è quello di far apprendere agli allievi non solo a capire, ma anche a far proprio quel linguaggio specialistico; dunque, non si può evitare di far entrare a contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi: al contrario, occorre presentarlo (imporlo) perché lo facciano proprio.

Come risolvere questo paradosso?
Purtroppo un'abitudine consolidata di atteggiamento e di modi, assunta dalla tradizione e dai libri di testo, spinge alcuni insegnanti, fin dai primissimi giorni di scuola, anche ai livelli di scolarità più bassa, a mescolare lingua comune, linguaggio matematico ed un altro subdolo registro linguistico che si situa tra quei due: una sorta di "lingua scolastica" il cui argomento è la Matematica, che io chiamo, per far paio con "politichese" o "burocratichese", il *matematichese*; si tratta di una specie di dialetto matematico che si usa in classe e la cui natura ho studiato a partire da D'Amore (1993a).
Va specificato subito che l'insegnante stesso subisce questo gergo, ne è vittima al pari dei suoi stessi allievi…

Vediamo più in dettaglio.

Che vi sia una lingua speciale, usata e proposta nel fare Matematica in classe, o in alcuni libri di testo, e che lo studente adotta o tenta di adottare credendola quella corretta, giusta, doverosa, da usare per obbligo… contrattuale nelle ore di Matematica, è facilmente verificabile: il libro di Matematica è l'unico che usa costrutti come "dicesi" (invece di "si dice"), "passante" (invece di "che passa"), "intersecantisi"… e che abbondi tanto di gerundi.

Tale lingua specifica, ibrida, è utilizzata (forse inconsapevolmente o forse per timore reverenziale o per mancanza di confidenza con la Matematica) dall'insegnante e, come dicevo e come mostro nel lavoro citato poco sopra, dallo studente che tende ad imitarlo. Poiché però lo studente non riesce a sopportare il "peso" di una lingua siffatta, così artefatta e lontana dalle sue abitudini, finisce con il crearsi un più modesto paravento linguistico, una sorta di quasi-modello, nel quale abbondano modi di dire, frasi fatte in quello stile.

È ovvio che a qualche cosa, in compenso, egli deve pur rinunciare: si tratta, purtroppo, ed in molti casi, del *senso*.

A tutto ciò si aggiunga il tentativo dello studente di copiare l'atteggiamento linguistico - argomentativo dell'insegnante e di quei compagni che hanno successo.

A questa coppia, formata da questa pseudo-lingua e da questo atteggiamento, ho dato appunto il nome di "*matematichese*", rintracciandolo ed esemplificandolo abbondantemente in esperienze compiute in ogni ordine di scuola.

Analizzando in dettaglio tali esperienze, si vede bene che c'è un profondo legame tra tutto ciò ed alcune clausole del contratto didattico (si veda anche D'Amore e Sandri, 1994, pagg. 115-122).

In diversi altri lavori sono ritornato su questo argomento con vari esempi tratti da *tutti* i livelli scolastici: ma la cosa si presenta come drammatica nella scuola secondaria.

Di fatto, quando si fa Matematica, la comunicazione non avviene certo nel linguaggio matematico dei matematici, ma neppure avviene nella lingua comune; si assume una sintassi specifica (a volte farraginosa), una semantica ritenuta opportuna e ne nasce una strana lingua... difficile da gestire.

In più, c'è il problema del simbolismo e degli algoritmi. Per molti insegnanti della scuola primaria c'è identità tra il concetto che si vuole insegnare, il suo simbolo matematico, i suoi riferimenti algoritmici.

Per farmi capire meglio, ricorrerò ad un esempio. Ho più volte sentito insegnanti di scuola primaria lamentarsi, accusando gli allievi di non aver capito il "concetto di divisione"; entrati più in dettaglio, si capiva bene che non di *concetto* si trattava, ma di *algoritmo*.

■ Ora, il *concetto* di divisione è una cosa: e qualsiasi bambino di 5 anni lo ha ben chiaro in mente, con o senza scuola; per fare la verifica, basta ricorrere ad un esempio concreto con un numero basso di oggetti discreti (6 caramelle, o biglie, da dividere tra 3 compagni, o fratelli).

■ Il *simbolo* è un'altra cosa: e qualsiasi bambino di 7 anni è in grado di maneggiare con disinvoltura il simbolo della divisione (mettendolo al posto giusto, tra dividendo e divisore, anche se non conosce queste parole).

■ L'*algoritmo* è tutt'altra cosa ancora e non è detto che esso venga maneggiato con padronanza nel corso della scuola elementare: ci sono casi (abbastanza) positivi e (molti) casi negativi.

Detto ciò, sarebbe ragionevole aspettare *dopo* la scuola elementare per porsi il problema di voler raggiungere l'obiettivo detto sopra, cioè la padronanza del linguaggio specifico della Matematica. Perfino negli stessi Programmi Ministeriali italiani di Matematica per la Scuola Primaria (1985) si legge: «(...) tenendo conto che, soprattutto nei primi anni di scuola, il linguaggio naturale ha ricchezza espressiva e potenzialità logica adeguate alle necessità di apprendimento».[8]
Poiché questa posizione è condivisa oramai da tutti i Paesi sui quali ha avuto una qualche influenza la ricerca in Didattica della Matematica, sono a mio avviso sempre più interessanti gli studi sull'uso della lingua comune, in contesto di insegnamento - apprendimento della Matematica, come quelli, per esempio, che da tanti anni fanno Colette Laborde (1982, 1990, 1991, 1995), Hermann Maier (1989, 1993, 1996) e D'Amore (1991, 1993a, b, 1998).
Da tali studi, ai quali rimando per un'analisi esplicita e circostanziata delle tematoche specifiche e delle modalità di ricerca, si evincono varie questioni che, in un colpo solo, si potrebbero esprimere come segue:
la lingua comune ed il linguaggio della Matematica entrano duramente in opposizione tra loro, in Didattica, costituendo un vero e proprio ostacolo sia alla comprensione sia ad un uso il più possibile "naturale" e spontaneo del linguaggio matematico atteso dall'insegnante.
Non a caso questa difficoltà (segnalata da tutti e tre gli autori) si rivela soprattutto nel momento più critico, quello dell'adolescenza, quando gli allievi ancora non hanno acquisito del tutto la padronanza della lingua comune e

[8] Un discorso a parte meritano naturalmente gli altri livelli scolastici ed in particolare merita attenzione l'interazione tra lingua naturale e linguaggio della logica. Suggerisco D'Amore (1991) e Ferro (1992).
Un'altra direzione possibile di interesse, fermo restando il livello scolastico e cioè limitandosi a scuole elementari e medie, è quello relativo alla possibilità di *insegnare a ragionare*, con tutte le complicazioni che ciò comporta: non ultima, la comprensione esatta di che cosa questa frase significhi (è ovvio che c'è differenza tra il ragionare in generale ed il ragionare nelle Scienze ed in particolare in Matematica; così, c'è differenza tra il ragionare per convincersi, per argomentare o per dimostrare; eccetera). A questo riguardo, oltre a tutti i lavori da me più volte citati di Duval (1992-93, 1995a, b), suggerisco anche Pontecorvo e Pontecorvo (1985), pagg. 311-325.

tuttavia si trovano ad un livello scolastico tale che non è più possibile evitare che venga loro richiesto un uso davvero formale del linguaggio matematico.
Che a volte si realizzino delle situazioni di totale incomprensione, è d'altra parte sotto gli occhi di tutti; molti ricercatori ma anche molti insegnanti confermano di aver trovato presso gli allievi "definizioni" di parallelogrammo del tipo: «Un quadrilatero è detto parallelogrammo quando ha i lati a due a due»; altre volte si trovano invece affermazioni del tipo: «La retta *a* è parallela» senza dire a che cosa, come se la proprietà di parallelismo fosse unaria; ancora mi è stato segnalato da una collega: «Un insieme si dice equipotente quando…». È come se lo studente non si rendesse conto che affermazioni del genere sono totalmente prive di senso, perché non è quello che sta cercando: gli basta in realtà aver fatto uso di parole sufficientemente simili a quelle udite pronunciare in aula dall'insegnante e dai compagni che hanno successo. Si tratta evidentemente di problemi ascrivibili al discorso generale che si sta facendo qui.

Lo studente incontra difficoltà in ciascuna delle tre caratteristiche che pertengono al linguaggio matematico e lo specificano: la sua precisione, la sua concisione, la sua universalità o atemporalità.
Le prime due contrastano nettamente con ogni precedente abitudine linguistica in senso comunicativo.
Quanto alla universalità, qui si gioca su una notevole riduzione di uso di tempi, da cui la atemporalizzazione; ma questo contrasta con le abitudini pregresse degli allievi che hanno soprattutto usato (e sono stati spronati a farlo) il testo e la lingua in modo narrativo.[9]

Se questa è la situazione, dal punto di vista critico del matematico o dell'insegnante o di chi scrive manuali, ben diversa è la situazione vista dalla parte dell'allievo. Che tipo di scrittura simbolica usa l'allievo? E poi: la usa? E quanto spontaneamente?
È oramai assodato che, spontaneamente, l'allievo tende a rifuggire dall'uso della scrittura simbolica, perfino dalla funzione di designazione. Lee e Wheeler (1989) si sono occupati dell'Algebra, Laborde di Aritmetica e Geometria (1982, 1990).
Che tipo di designazioni preferiscono gli studenti? In generale preferiscono far uso della lingua comune, piuttosto che di simbolismo matematico e ciò avviene secondo tre strategie:
- l'espressione che descrive l'oggetto viene descritta parola per parola;

[9] La Laborde (1995) cita a questo punto (D'Amore, 1993b); ma si può vedere anche D'Amore, Franchini e altri (1995); in quest'ultimo lavoro si vede nettamente come ogni bambino di scuola elementare tenda in modo naturale a ri-raccontarsi la scena descritta nel testo di un problema, immettendola in una narrazione (senza che ciò sia però significativamente correlato con una miglior risoluzione dello stesso problema).

- l’allievo fa riferimento a fatti temporali («la retta che ho tracciato *per prima*»);
- l’allievo usa proprietà extra-matematiche per distinguere («il rettangolo grande/piccolo»); a volte si trova anche come proprietà descrittiva qualche cosa che potrebbe essere chiamata dislocazione nello spazio della pagina: «il rettangolo in alto/in basso; il quadrato di destra/di sinistra» [ved. anche (Maier, 1989)].

È molto interessante, allora, cercare di trovare strumenti per poter valutare la comprensione dei testi scritti di Matematica da parte degli allievi.[10]
Uno dei settori in cui ciò si è fatto di più è quello dei *word problems*, cioè dei problemi il cui testo è espresso a parole, in lingua comune.
Alcuni di questi studi si sono occupati di gradi di esplicitazione tra le quantità date e le incognite (De Corte, Verschaffel, De Win, 1985; Bachor, 1987); altri del comportamento degli allievi di fronte a parole che vengono ritenute chiave per la semantica della frase intera e per la scelta del conseguente processo risolutivo da adottare (Nesher, Teubal, 1975; Fayol, 1990; D’Amore, 1993b, 1997).
Laborde chiama queste caratteristiche linguistiche: *variabili redazionali*, nel senso che si tratta di elementi del linguaggio modificando le quali si ha la redazione in modi diversi dello stesso soggetto; è dimostrato che la redazione influisce sulle modalità di risoluzione, qualora si tratti del testo di un problema da risolvere. Un bell’esempio di analisi delle variabili redazionali nel caso del testo di un problema di costruzione geometrica è presentato da Laborde (1995). Rinvio a questo lavoro il lettore che volesse entrare in dettagli su questo particolare campo.

Si tratta allora di studiare delle situazioni di apprendimento, specifiche per l’apprendimento linguistico. A questo scopo ci si immette in un processo di comunicazione all’interno della teoria delle situazioni; abbiamo molteplici esempi di esperienze in questo campo sull’apprendimento delle scritture aritmetiche (Schubauer-Leoni, Perret-Clermont, 1984; Saada, Brun, 1984) e sulle rappresentazioni piane di oggetti con lo scopo di poterli far ricostruire da soggetti diversi (Gaulin, 1985; Bessot, Eberhard, 1986).

In Geometria si sono studiati il vocabolario della Geometria ed i processi della designazione. È interessante, in questi casi, mettere due allievi a confronto per

[10] Esistono studi sperimentali a carattere statistico su questa questione che sfruttano indici come: numero di sillabe per parola, numero di parole per frase, lunghezza delle parole, uso di affissi, suffissi eccetera. Come si vede, tutt’altro genere di questioni. Io qui non li tratterò, per non cambiare troppo argomento, ma rimando a Gagatsis (1995), dove si trova un’ampia bibliografia specifica.

verificare se sia avvenuto o meno un processo di comunicazione efficace e significativo.
La cosa interessante, in questi processi comunicativi, è il seguente paradosso, verificabile in mille situazioni a-didattiche o con esperienze apposite;[11] l'allievo A comunica una certa situazione geometrica *S* ad un allievo B; secondo l'insegnante che segue l'esperienza, le frasi usate da A risultano essere non descrittive di *S*; cioè: la comunicazione di A verso B non descrive in realtà *S* a causa dell'ambiguità dei termini, dell'incongruenza sintattico - semantica eccetera. Insomma, rispetto all'attesa linguistica corretta da parte dell'insegnante, la frase descrittiva di *S* usata da A è scorretta. Ma B invece capisce ed esegue *correttamente* il compito, come se vi fosse qualche cosa di implicito, di taciuto, nella comunicazione tra pari!

Altri tentativi sono stati fatti per insegnare agli allievi ad estrarre dal testo dei problemi delle informazioni che non fossero solo quelle relative a dati numerici ed indicazioni implicite delle operazioni da eseguire: chiedere di discutere e studiare testi di problemi con dati superflui (Semadeni, 1987); chiedere di produrre testi per compagni in condizioni particolari (Laborde, 1991); fare analisi sul contenuto di un testo, sulle informazioni che dà, sulle relazioni tra informazioni, sulla sua scomposizione e ricomposizione (IREM Rennes, 1985); molto diffuse in tutto il mondo sono attività nelle quali viene dato un testo senza domanda, e l'allievo deve crearne una (e viceversa).

Un'altra analisi molto dettagliata sull'uso della lingua comune in contesto matematico è quella che fa da anni Hermann Maier (1989, 1993, 1996).
Egli esamina, con allievi di varie età, situazioni didattiche nelle quali la consegna linguistica e la sua interpretazione hanno un ruolo determinante. Dimostra così come vi siano *interferenze* tra il linguaggio matematico e la lingua comune, come si crei un dissidio e come a questa situazione di confusione e di incertezza collaborino attivamente alcuni libri di testo! Anzi: in questi ed in altri articoli, Maier sottolinea le incongruità e le contraddizioni esplicite che ha rintracciato. Importante mi sembra l'analisi che fa Maier anche sull'uso delle stesse singole parole in chiave didattica. Nel secondo dei due articoli appena citati, molte delle *difficoltà* riscontrate hanno a che fare con problemi di comunicazione, dunque con la lingua comune, e molte delle modalità escogitate per superarle sfruttano appunto interventi sulla lingua comune.

[11] Riscontrate anche da Margolinas (1993). Esperienze di questo tipo sono documentate da videocassette che furono realizzate da Francesco Speranza presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, da molti anni. Anche presso il NRD di Bologna si sono fatte molte esperienze analoghe fin dagli anni '80, sia con allievi sia, e soprattutto, con insegnanti dei primi livelli di scolarità.

Le difficoltà di rappresentare verbalmente la propria conoscenza sono sotto gli occhi di qualsiasi insegnante; non è un caso che, negli ultimi decenni, si sia dedicato ampio spazio allo studio dello sviluppo delle competenza linguistiche, specie in àmbito psicolinguistico, come ricorda anche Boero (1989, pag. 20). Riferendosi a studi di French (1985) e Nelson (1978) specificamente rivolti all'acquisizione dei connettivi, Boero scrive: «[queste ricerche] mostrano che il processo di costruzione di abilità di rappresentazione verbale della conoscenza e di modellizzazione verbale dei nessi logici è condizionato dall'oggetto su cui si esercita l'attività conoscitiva […]; dall'altro autorizzano a ritenere che un determinato "oggetto di conoscenza" possa essere scelto avendo di mira contemporaneamente finalità di costruzione concettuale in ambito matematico e di costruzione di prerequisiti linguistici necessari per il lavoro matematico (con una notevole economia di tempo)».
L' "economia di tempo" è anche ricchezza di pensiero, consapevolezza semantica, duttilità espositiva. Il "blocco" espositivo o l'incapacità di dare risposte a problemi sono spesso causati da incapacità di verbalizzazione, da una ristretta e limitata possibilità verbale.

La prova fatta da Laura Giovannoni (1996) con bambini in età prescolare è illuminante, in tal senso. Rifacendo le prove di Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) sulla misura superficiale con bambini di 5 anni, la Giovannoni ha avuto conferma dei classici risultati lì evidenziati. Ma il vero motivo che sembrava stare alla base dell'incapacità da parte dei bambini di gestire l'estensione superficiale sembrava essere più di tipo linguistico con non logico: i bambini usavano l'aggettivo "grande" per indicare troppe qualità generiche. La Giovannoni ha allora dedicato quasi un intero anno ad introdurre, in una classe di bambini di 4 anni, termini come "estensione", "esteso" etc. rendendo consueto questo termine nelle sue accezioni legate alla misura superficiale e giungendo quindi a far sì che i bambini non avessero più necessità di usare l'ambiguo termine "grande" per dire "molto esteso", o "più grande" per dire "più esteso". Rifacendo poi le stesse prove con quei bambini, l'anno dopo, cioè a 5 anni, i risultati sono stati totalmente diversi da quelli classici di Piaget e collaboratori; i bambini mostravano totale consapevolezza, dominavano con sicurezza le questioni e non cadevano nei celebri "trucchi"di Piaget (quello delle case, dell'erba e delle mucche al pascolo, per esempio). Rinvio a quel lungo articolo per avere i dettagli dell'apparato di ricerca e degli specifici risultati ottenuti.

Ad una tematica relativamente vicina a quella che sto trattando in questo paragrafo, e cioè l'analisi delle difficoltà linguistiche in opposizione a quelle apparentemente logiche nelle attività matematiche (e soprattutto nelle descrizioni, nelle definizioni e nelle dimostrazioni), si è dedicato un gruppo di studio fondato a Bologna per accordo tra il Provveditorato agli Studi e l'Università di Bologna nel 1992-93 e poi confluito nel Grimed, sezione di Bologna (Grimed Bologna, 1998).

Dunque, sembra proprio ragionevole dedurne che c'è una forte tendenza dei giovani a far uso della lingua comune, avversata da questioni relative al contratto didattico; e che si dovrebbe puntare su una non messa al bando della lingua comune, nella pratica matematica didattica, prima di passare al linguaggio formale ed anche durante il suo apprendimento. Anzi: sembra ragionevole spronare insegnanti e studenti a fare studi sistematici (paragoni, analogie, discrepanze) tra queste due modalità linguistiche. Più espliciti e non nascosti sono questi paragoni, più sembra ragionevole sperare che si abbia consapevolezza dei diversi registri.

La problematica del passaggio tra registri diversi

Raymond Duval sta da molti anni lavorando nel settore delle rappresentazioni semiotiche e delle loro relazioni con il funzionamento cognitivo; le sue analisi stanno costringendo a riflettere in un modo tutto nuovo all'apparato cognitivo messo in campo nell'atto dell'apprendimento della Matematica (Duval, 1993, 1995a,b, 1996).
La sua ricerca in Didattica della Matematica si articola principalmente su due fronti:

- il tema delle rappresentazioni semiotiche in generale e le articolazioni dei diversi registri linguistici della Matematica;
- il tema dell'argomentazione e della dimostrazione.

Ma i due temi sono intimamente connessi.
«Le rappresentazioni semiotiche sono rappresentazioni la cui produzione non è possibile senza la mobilitazione di un sistema semiotico: così le rappresentazioni semiotiche possono essere produzioni discorsive (in lingua naturale, in lingua formale) o non discorsive (figure, grafici, schemi, ...). E questa produzione non risponde unicamente o necessariamente ad una funzione di comunicazione: può anche rispondere soltanto ad una funzione di oggettivizzazione (per sé stessi) o ad una funzione di trattamento. Per capire la produzione semiotica, bisogna prendere in considerazione tre aspetti: l'aspetto strutturale, relativo alla determinazione della significatività dei segni e a quella delle possibilità di rappresentazione che essi offrono; l'aspetto fenomenologico, relativo ai vincoli psicologici di produzione o di comprensione dei segni; e l'aspetto funzionale, relativo al tipo di attività che i segni permettono di svolgere [a questo punto appare una tabella riassuntiva ed esplicativa]. Non bisogna dunque confondere cambiamento di registro (*conversione della rappresentazione di qualcosa* in una rappresentazione di

questa stessa cosa in un altro sistema semiotico) da una parte e cambiamento di modalità di produzione (*commutazione modale di una rappresentazione*) dall'altra. (...) Un registro si determina in rapporto ad un sistema semiotico che permette di assolvere le tre funzioni cognitive fondamentali. Un quadro[12] si determina in rapporto a degli oggetti teorici, nell'occorrenza degli oggetti matematici. Si può avere cambiamento di quadro senza cambiamento di registro e cambiamento di registro senza cambiamento di quadro, poiché un quadro può esigere la mobilitazione di parecchi registri (per esempio la geometria). Come vedremo, i due punti decivisi concernenti la specificità dei registri sono i seguenti:
-un cambiamento di registro può incontrare difficoltà specifiche di non congruenza, difficoltà che non sono di natura concettuale (dato che il passaggio inverso non suscita necessariamente le stesse difficoltà);
-gli apprendimenti richiedono un coordinamento dei diversi registri di rappresentazione che un dominio di conoscenze mobilita» (Duval, 1995b; nella trad. it., pagg. 252-253).
Più avanti, nello stesso articolo, alla pagina 259, prosegue: «Non è sufficiente che ci sia uno sviluppo di ogni registro; il coordinamento dei diversi registri di cui il soggetto dispone o che l'insegnamento si sforza di fargli acquisire (per esempio quello della scrittura algebrica) richiede comunque il loro coordinamento. Del resto ci si può chiedere se non sia nel quadro di un lavoro di coordinamento che nuovi registri dovrebbero essere introdotti. In ogni caso, il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (coscienza del superamento di una soglia, iniziativa e autocontrollo nello svolgimento dei procedimenti ...). Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo. A diversi livelli dell'apprendimento si può registrare la permanenza di una suddivisione dei registri di rappresentazione tra loro. Un fattore importante di questo fenomeno di suddivisione è la *non-congruenza* tra una rappresentazione da convertire e la rappresentazione del registro scelto».

Inutile dire che mi sono soffermato così a lungo e citando così a lungo perché condivido in pieno la problematica. In più occasioni, Duval l'ha esemplificata con discorsi teorici e con analisi su campo. Anche in Duval (1996) si trovano degli esempi.

Mi sembra ora necessario richiamare due punti che giudico fondamentali.

[12] Duval si riferisce qui alla nozione di "quadro" introdotta da Régine Douady (1984).

Punto primo.
In (Duval, 1993) si evidenzia come spesso in Matematica càpiti che si faccia uso di significanti diversi per uno stesso significato. Per esempio, i tre diversi significanti 0,5 ; 1/2 ; $5 \cdot 10^{-1}$ rappresentano lo stesso *oggetto*. Essi sono dunque significanti diversi di uno stesso significato assunto come oggetto e quindi denominato *significato-oggetto*.
Dunque, nel lavoro citato, l'Autore studia il caso di diversi significanti S_1, S_2, ..., S_n di uno stesso significato *S*, nel caso in cui *S* sia un singolo oggetto matematico.

Punto secondo.
In Duval (1995b) (pag. 266 della trad. it.), si legge: «Nei compiti proposti agli allievi, da una parte bisogna ben distinguere la consegna propriamente matematica e la consegna cognitiva e, dall'altra, vedere il coinvolgimento reale della consegna matematica nella consegna cognitiva. Questo vuol dire, infatti, che non sono separabili, ma che possono essere viste da due punti di vista diversi. È a questa condizione che si può veramente prendere in considerazione questo fatto inevitabile: l'esecuzione di una consegna matematica implica la mobilitazione di un funzionamento cognitivo. Questo vuol dire che non si possono analizzare i processi di acquisizione delle conoscenze matematiche senza considerare i seguenti fenomeni:
l'indipendenza dei gradi di complessità propri ad ognuna delle due consegne (matematica e cognitiva);
l'esecuzione della maggior parte delle consegne matematiche, anche delle più semplici, necessitano di uno sviluppo del funzionamento cognitivo nel senso di ciò che abbiamo chiamato differenziazione funzionale dei registri di rappresentazione».
[Nell'articolo segue un esempio per illustrare che cosa significhi la distinzione tra consegna propriamente matematica e consegna cognitiva; e tale esempio chiama in causa alcuni cambiamenti di registri: da una tabella al grafico e viceversa; da una scrittura algebrica al grafico e viceversa; dalla lingua naturale alla scrittura algebrica].

L'insieme dei punti primo e secondo, mi ha spinto alcuni anni fa ad effettuare una prova (D'Amore, 1998) che ha dato frutti interessanti in entrambe queste direzioni; in essa si evidenzia come la scelta dei registri semiotici non sia affatto neutra per l'allievo; e come le trasformazioni di trattamento e conversione siano tutt'altro che spontanee o acquisite *d'emblée* per il solo fatto di alludere allo stesso significato.
Non solo, ma i contenuti significativi che l'allievo "legge" in un messaggio dipendono dai diversi registri semiotici scelti per comunicarlo.

Ciò sconvolge molte delle sicurezze comunicative dell'insegnamento tradizionale e costringe a rivedere daccapo tutto quanto riguarda che cosa intendere davvero per rappresentante semiotico, quale lotta intestina vi sia tra la noetica attesa e le manifestazioni semiotiche nelle quali la Matematica si esprime; ed infine, più in generale, che cosa intendere con significati (o concetti).
Sono questi i temi generali che tratto in D'Amore (*, **) e per i quali rinvio a quegli articoli. In questo mi limito dunque solo a presentare il problema generale e la sua origine, tutto sommata apparentemente limitata e circostanziata.

Testi citati

Arzarello F. (1983). *Matematica e linguistica*. Milano, Angeli.

Arzarello F. (1987). Le strutture linguistiche di un testo matematico. In: D'Amore B. (ed.) (1987), *La matematica e la sua didattica*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme 1987. Roma, Armando.

Arzarello F., Bazzini L. & Chiappini G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno 6, Progetto Strategico del C.N.R. "Innovazioni didattiche per la matematica", Pavia 1994 (resoconto del IX Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Pisa 5-7 novembre 1992).

Bachor D. (1987). Towards a taxonomy of word problems. In: Bergeron J., Herscovics N. & Kieran C. (eds.) (1987), *Proceedings of the XI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal. 163-169.

Bessot A. & Eberhard M. (1986). Adaptation de la perspective à une situation complexe (élèves de 9-12 ans). *European journal of psychology of education*, 1, 2, 83-96.

Boero P. (1989). Campi semantici nell'insegnamento – apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare. Report Seminario Nazionale di Pisa 1989. [Dattiloscritto]

Brousseau G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, 21, 47-68.

Brousseau G. (1989). La tour de Babel. Études en didactique des mathématiques, 2, Irem de Bordeaux.

D'Amore B. (1991). logica Logica LOGICA. La didattica della logica fra gli 8 ed i 15 anni. In: D'Amore B. (ed.) (1991), *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme 1991. Bologna-Roma, Apeiron. 79-90.

D'Amore B. (1993a). Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301. [Ristampato in: Jannamorelli B. (ed.) (1994), *Insegnamento/Apprendimento della Matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*. Atti del 1° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 1993. Sulmona, Qualevita. Questo articolo è stato ristampato, in una versione ampliata, in lingua tedesca, con il titolo: Schülersprache beim Löen mathematischer Probleme, *Journal für Matematik Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97; ed anche in: Gagatsis A. & Maier H. (eds.) (1995), *Texte zür Didaktik der Mathematik*. Regensburg, Erasmus. 105-125].

D'Amore B. (1993b). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano, Angeli. II ed. 1996. [Trad. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].

D'Amore B. (1997), Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20A, 3, 241-256. [In lingua spagnola: *Suma*, 26, 1997, 111-116]. In lingua francese: in Gagatsis A. (1999), *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Nicosia (Cipro), Intercollege Press. 25-36].

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli [bilingue: italiano ed inglese]. *L'educazione matematica*, 1, 7-28. [In lingua spagnola: *Uno*, 1, 1998, 63-76].

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

D'Amore B. (*). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques factuers inhibant la dévolution, *sotto referee per la stampa*.

D'Amore B. (**). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica", *sotto referee per la stampa*.

D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N. & Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A, 2, 131-146. [Pubblicato in lingua inglese in: Gagatsis A. & Rogers L. (eds.) (1996), *Didactics of Mathematics and History of Mathematics*. Thessaloniki, Erasmus. 53-72].

D'Amore B. & Martini B. (1999). Sobre la preparacion teorica de los maestros de matematica. *Relime*, 1. [In corso di stampa; uscita prevista: 1999].

D'Amore B. & Sandri P. (1994). Everiday language and "external" models in an a-didactic situation. In: Malara N.A. & Rico L. (eds.) (1994), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematical Education*, Modena 15-19 February 1994. Modena, CNR. [Ristampato in: Gagatsis A. (ed.) (1994), *Didactiché ton Mathematicon*. Thessaloniki, Erasmus, (in greco) 253-262, (in francese) 585-594].

De Corte E., Verschaffel L. & De Win A. (1985). The influence of rewording problems on children's representations and solutions. *Journal of educational psychology*, 77, 460-470.

Douady R. (1984*). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'État, Univ. de Paris. [Pubblicato su: *Recherches en didactique des mathématiques*, 7, 2, 1986, 5-31].

Duval R. (1992-93). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130-152. Appare anche come volume 1 della Collana: Bologna-Querétaro (1998), Bologna, Pitagora].

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Duval R. (1995b). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'École d'été 1995. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 250-269].

Duval R. (1996). Il punto decisivo nell'apprendimento della matematica. la conversione e l'articolazione delle rappresentazioni. In: D'Amore B. (ed.) (1996), *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme 1996. Bologna, Pitagora. 11-26.

Duval R. (1996-1997a). Appunti provvisori non pubblicati del corso tenuto presso l'IUFM di Gravelines.

Duval R. (1996-1997b). Représentation et représentations. Séminaire U.D.R.e.F.F. (dattiloscritto).

Eco U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano, Bompiani.
Fayol M. (1990). *L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution de problème*. Neuchâtel, Delchaux & Niestlé.
Ferro R. (1992). Definire, argomentare, dimostrare: il ruolo della Logica. In: Furinghetti F. (ed.) (1992), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*. Atti del II Internuclei scuola secondaria superiore, Genova 1991. Quaderni CNR n. 13. 61-82.
French L.A. (1985). Acquiring and using words to express logical relationships. In: Kucsaj S.A. & Barrett M.D. (eds.) (1985), *The development of Word Meaning*. New York, Springer Verlag.
Gagatsis A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica*, 2, 136-146.
Gaulin C. (1985). The need of emphasizing various graphical representations of 3 dimensional shapes and relations. In: Streefliand L. (ed.) (1985), *Proceedings of the IX PME.* Noordwijkerhout (Holland).
Giovannoni L. (1996). Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica,* 4, 394-423. [In lingua francese in: D'Amore B. & Gagatsis A. (eds.) (1997), *Didactics of Mathematics - Technology in Education*. Thessaloniki, Erasmus. 95-130].
Grimed Bologna (1998). Un contributo alla ricerca sulle difficoltà dell'apprendimento della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-312.
IREM Rennes (1985). *Français Maths Lecture grammaire proportionalité*.
Laborde C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseigement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.
Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. In: Nesher P.A. & Kilpatrick J. (eds.) (1990), *Mathematics and cognition*. Cambridge, Cambridge Univ. Press.
Laborde C. (1991). Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans): une expérimentation. *Petit x*, 28, 57-90.
Laborde C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135. [Si tratta della conferenza che la Laborde ha tenuto al II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona il 30 marzo 1995; quindi appare anche su quegli Atti: Jannamorelli B. (ed.) (1995), *Lingue e linguaggi nella pratica matematica*, Atti del 2° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 1995. Sulmona, Qualevita].
Lee L. & Wheeler D. (1989). The arithmetic connection. *Educational studies in mathematics*, 20, 1, 41-54.
Maier H. (1989). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305; appare anche come vol. 2 nella Collana Bologna-Querétaro (1998). Bologna, Pitagora].
Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.
Maier H. (1996). Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superale. In: D'Amore B. (ed.) (1996), *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme 1996. Bologna, Pitagora. 27-48.
Margolinas C. (1993). *Le vrai et le faux en classe de mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.
Nelson K. (ed.) (1978). *Children's Language*. Vol. 1. New York, Gardner Press.
Nesher P.A & Teubal E. (1975). Verbal cues as interfering factor in verbal problem solving. *Educational studies in mathematics*, 6, 41-51.
Piaget J. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Piaget J., Inhelder B. & Szeminska A. (1948). *La géometrie spontanée de* l'enfant. Paris, P.U.F. [Trad. it.: Firenze, Giunti e Barbèra, 1976].

Pontecorvo C. & Pontecorvo M. (1985). *Psicologia dell'educazione. Conoscere a scuola*. Bologna, Il Mulino.

Saada E.H. & Brun J. (1984). L'elaboration de formulation dans un jeu arithmétique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 2, 2, 215-231.

Schneuwly B. & Bronckart J.P. (1985). *Vygotski aujourd'hui*. Neuchâtel. Delachaux et Niestlé.

Schubauer-Leoni M. L. & Perret-Clermont A.N. (1984). *Construction sociale d'écritures symboliques en deuxième primaire*. Interactions didactiques, 4, Université de Genève et Séminaire de Psychologie, Université de Neuchâtel.

Schweiger F. (1992). Mathematics is a language. In: *Selected Lectures from the VII ICME*, Québec, 297-309.

Semadeni Z. (1987). Verbal problems with missing, surplus or contradictory data. Séminaire de l'équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université J. Fourier, Grenoble.

Tryphon A. & Vonèche J. (eds.) (1996). *Piaget-Vygotsky. The social genesis of thought*. Erlbaum, Taylor & Francis Ltd. [Trad. it.: Firenze, Giunti, 1998].

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 10, 133-169. [Trad. it. di F. Speranza in: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1992, 4-19].

Vygotskij L.S. (1966). *Pensiero e Linguaggio*. Firenze, Giunti e Barbèra. [La I ed., Cambridge, MIT Press, 1962, è un riassunto tratto dalla ed. originale in lingua russa, raccolta di articoli pubblicati a Mosca nel 1956. L'ed. it. è condotta su quella in lingua inglese, tranne il cap. 7 che è traduzione integrale].

Watzlawick P., Beavin J.H. & Jackson D.D. (1967). *Pragmatic of the human communication*. New York, W. W. Norton & Company. [Trad. it.: Roma, Astrolabio, 1971].